

Écoulements dans les milieux poreux – Loi de Darcy

Proposition d'expérience

Par E. Deleporte, le 21 mai 2003

Bibliographie – 'Hydrodynamique physique', E. Guyon, CNRS Editions

• Loi de Darcy pour un écoulement unidimensionnel à basse vitesse

On s'intéresse à des écoulements où le milieu est saturé (c'est-à-dire rempli complètement) par une seule phase fluide.

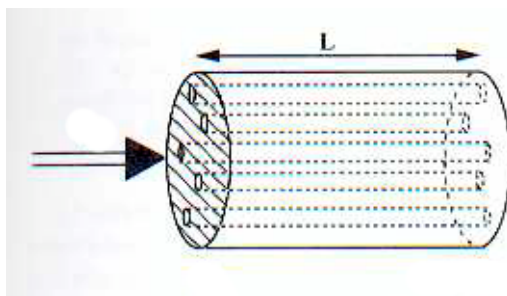
Si l'écoulement se fait à une vitesse assez faible pour que le nombre de Reynolds, défini à partir de la taille des pores et de la vitesse locale, soit très inférieur à l'unité, on peut admettre, en écoulement stationnaire, que les gradients de pression sont proportionnels à la vitesse d'écoulement dans les pores (loi de Poiseuille appliquée à chaque pore). Cette relation de proportionnalité, valable pour tous les pores individuellement, se conserve si on fait la moyenne du débit et des gradients de pression sur un volume grand devant la taille des pores. Pour un échantillon de longueur L et de section A , le débit volumique Q vérifie donc

$$Q = \frac{K}{\eta} A \frac{\Delta P}{L}$$

La constante de proportionnalité K est la perméabilité, qui est une caractéristique du milieu poreux. ΔP est la variation de pression entre les 2 extrémités de l'échantillon (perte de charge), η est la viscosité dynamique du liquide qui s'écoule.

• Evaluation de la perméabilité d'un milieu poreux modélisé par un faisceau de capillaires parallèles

On modélise le milieu poreux par un ensemble de capillaires rectilignes parallèles de diamètres individuels d .



Pour un capillaire unique, la relation entre la perte de charge et le débit Q est donnée par la relation de Poiseuille

$$Q = \frac{\pi}{128} \frac{\pi P}{L} d^4$$

Soit n le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens de l'écoulement et K la perméabilité pour les écoulements dans cette direction. Le débit total à travers l'ensemble de la section A est donc donné par

D'après la loi de Darcy, Q vérifie également

$$\frac{Q}{A} = \frac{K}{L} P$$

Donc

$$K = n \frac{\pi d^4}{128}$$

Définissons la porosité ϕ comme le rapport du volume des pores au volume total. Pour un matériau homogène et isotrope, ϕ est égal à la fraction de surface occupée par les pores dans une section plane du matériau, ce qui mène à

$$\phi = n \frac{\pi d^2}{4}$$

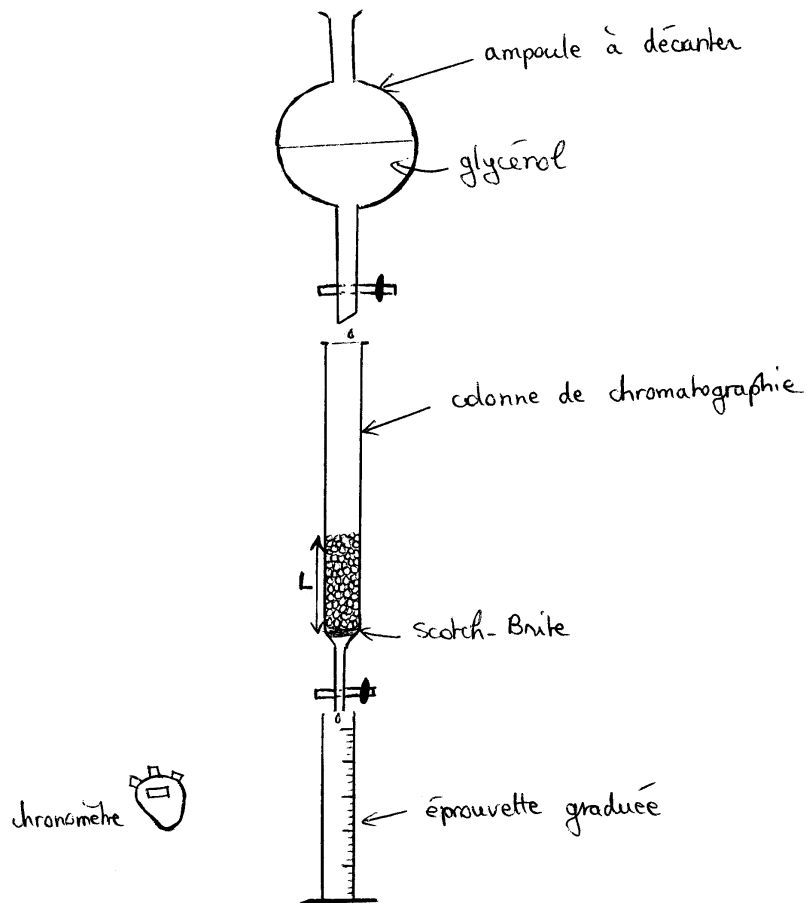
On a alors

$$K = \frac{\phi d^2}{32}$$

Ainsi, pour une porosité donnée, la perméabilité varie comme le carré du diamètre des canaux. La chute de pression pour un débit de fluide donné augmente (ou encore le débit pour une chute de pression donnée diminue) très rapidement lorsque la taille des pores décroît même si le volume poreux total reste constant.

• Manipulation proposée : Écoulement du glycérol dans un milieu poreux formé de billes de verre de dimensions calibrées

Nous proposons une expérience dans laquelle le milieu poreux est installé dans une colonne de verre (une colonne de chromatographie par exemple) maintenue verticalement. Dans le dispositif expérimental proposé ci-dessous, la chute de pression est maintenue constante et le débit volumique est mesuré.



Le liquide □ le glycérol

Quelques propriétés physiques du glycérol □

Densité volumique □ $\rho_{gl} = 1.26 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Viscosité dynamique □ $\eta_{gl} (20^\circ\text{C}) = 1.412 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

$\eta_{gl} (30^\circ\text{C}) = 0.612 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

Viscosité cinématique □ $\nu_{gl} (20^\circ\text{C}) = \eta_{gl} (20^\circ\text{C}) / \rho_{gl} = 1.12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

$\nu_{gl} (30^\circ\text{C}) = \eta_{gl} (30^\circ\text{C}) / \rho_{gl} = 4.85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

(Attention, la viscosité du glycérol varie beaucoup avec la température).

Stocker du glycérol dans l'ampoule à décanter.

Faire s'écouler le glycérol dans la colonne remplie d'une hauteur L de billes (L de l'ordre de 10 cm). Dans cette manipulation, on veut maintenir la chute de pression ΔP constante. Il faut alors que le niveau de glycérol reste constant pendant le temps de la manip □ régler le débit de glycérol sortant de l'ampoule de façon à ce que le glycérol affleure le haut de la colonne pendant tout le temps de la manip, le débit volumique à la sortie de l'ampoule est alors égal au débit volumique à la sortie de la colonne. Ou alors on peut raccorder l'ampoule et la colonne avec un bouchon en caoutchouc □ l'ampoule contient environ 150 ml de glycérol, on va prélever environ 10-20 ml pour mesurer le débit, donc le niveau du glycérol dans l'ampoule va à peine baisser et on pourra le considérer comme constant.

S'assurer que le milieu poreux est bien saturé et qu'il ne reste pas de bulles d'air dans la colonne.

Mesurer le débit volumique de glycérol qui s'écoule de la colonne à l'aide d'une éprouvette graduée et d'un chronomètre.

Le milieu poreux

Nous disposons de billes de verre de diamètres calibrés 2 mm et 3 mm, que nous empilons dans la colonne sur une hauteur L.

Pour avoir une idée de la porosité d'un tel milieu, on peut chercher à évaluer la compacité C de la structure (C= rapport du volume occupé par les billes au volume total), sachant que $\phi = 1 - C$. Pour un réseau cubique à faces centrées constitué de billes identiques de rayon R, on peut calculer C (fraction de volume occupée par des sphères en contact) $C = 0.74$. La valeur 0.74 de la compacité de la structure cubique à faces centrées est la plus élevée que l'on connaisse pour des empilements de sphères de même rayon R. En pratique, quand on remplit un récipient avec des billes de même rayon, cet empilement périodique ne se forme pas spontanément, on construit en fait un empilement désordonné de compacité comprise entre 0.59 et 0.64, quel que soit le mode de remplissage. Donc ϕ est typiquement compris entre **0.36 et 0.41**.

Dans notre manip, on remplit la colonne d'une hauteur L de billes. Pour maintenir les billes dans la colonne, on les calera avec un petit morceau d'éponge Scotch-Brite coincé au fond de la colonne. On vérifie que le débit volumique de glycérol à travers la colonne en l'absence de billes n'est pas modifié par la présence de ce petit morceau de Scotch-Brite.

Exemple de mesure expérimentales

Hauteur du milieu poreux 10 cm

Diamètre du tube contenant le milieu poreux 2 cm.

On trouve pour les billes de verre de diamètre 3mm un débit $Q_1 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ (soit un écoulement de 22.7 ml en 12 minutes 26 secondes), pour les billes de diamètre 2 mm un débit $Q_2 = 1.3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ (soit un écoulement de 10 ml en 12 minutes 26 secondes).

P, A, L et ρ_{gl} restant constants dans la manip, on a donc $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{K_1}{K_2}$

Si on suppose que la porosité est du même ordre de grandeur pour les 2 types de billes, K est alors proportionnel au carré du diamètre des pores, qui est lui-même proportionnel au

diamètre des billes (voir remarque ci-dessous) On a alors $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$

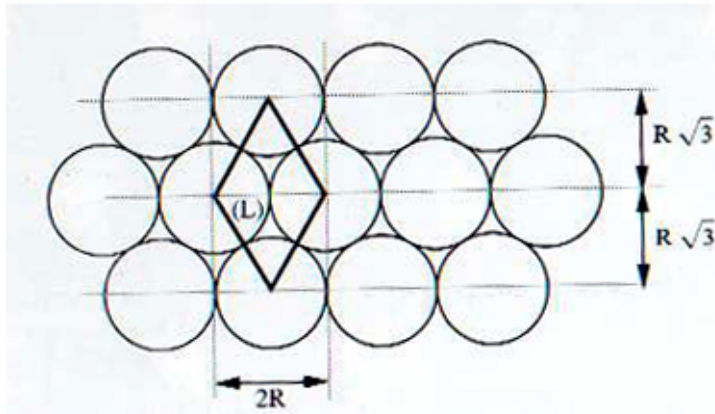
Or, pour les billes utilisées ici $(R_1/R_2)^2 = (3/2)^2 = 2.25$

D'autre part, on mesure $Q_1/Q_2 = 2.3$

On obtient un bon accord quantitatif.

Remarque Le diamètre des pores est proportionnel au diamètre des billes.

Pour fixer les idées, estimons la surface d'un pore individuel sur un système à 2 dimensions (c'est plus facile à appréhender avec un schéma). Considérons un empilement triangulaire compact de disques de rayon R.



Dans cette configuration, un motif unité (la maille élémentaire), qui répété périodiquement, conduit au réseau triangulaire, est un losange (L) de surface $S_L = (2R)(2R)\sqrt{3}/2$. A l'intérieur de cette surface, il y a exactement les éléments d'un disque de surface $S = \pi R^2$, donc le pore a une surface $S_L - S = (2\sqrt{3} - \pi)R^2$ qui est bien proportionnelle à R^2 .

On peut généraliser ce genre de raisonnement géométrique à un système à 3 dimensions.

Une façon très visuelle de présenter la manip consiste à monter en parallèle deux colonnes identiques remplies de la même hauteur L de billes. Dans une colonne, on met les billes de 2 mm, dans l'autre les billes de 3mm. On démarre en même temps l'écoulement des 2 colonnes et on relève les volumes écoulés au bout de quelques minutes. On voit alors qu'une éprouvette est plus remplie que l'autre et on peut faire les mesures quantitatives comme cela a été présenté ci-dessus.

Il faut vérifier que le nombre de Reynolds Re est faible.

$Q = U.A$ où U est la vitesse de l'écoulement dans le milieu poreux.

$Re = \frac{UR}{\nu}$ (la taille des pores est typiquement de l'ordre de grandeur du rayon des billes). On

trouve que Re est de l'ordre de 0.06 pour les billes de diamètre 2 mm, 0.1 pour les billes de diamètre 3 mm. Donc Re est bien très inférieur à 1.

• Remarque. Écoulement de l'eau dans du sable ou du gel de silice

Propriétés physiques de l'eau.

Densité volumique $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Viscosité dynamique $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

Viscosité cinématique $\nu_{\text{eau}} = \eta_{\text{eau}} / \rho_{\text{eau}} = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

On peut faire la manip proposée ci-dessus avec de l'eau, mais la viscosité de l'eau étant plus faible que celle du glycérol à 20°C, il faut utiliser des matériaux poreux ayant des pores très petits, de façon à ce que le débit soit suffisamment faible et assurer ainsi un nombre de Reynolds inférieur à 1. On prendra alors du sable ou du gel de silice comme milieu poreux.

Pour assurer ΔP constant, on remplacera l'ampoule à décanter par un grand récipient du genre de celui qui est utilisé pour l'écoulement de Poiseuille. Ce récipient sera raccordé à la colonne

par un bouchon en caoutchouc (là aussi, attention aux bulles d'eau). Pour mesurer le débit, on prélève typiquement 50 à 100 ml d'eau. Le grand récipient contenant environ 2 litres d'eau, ce prélèvement n'affectera pas de façon sensible le niveau de l'eau.

Exemple de mesure expérimentale

Hauteur du milieu poreux \square 20 cm

Diamètre du tube contenant le milieu poreux \square 2,5 cm.

- Avec du sable à mortier tamisé \square on mesure $Q_1 \square 4.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ (soit 80 ml en 2 minutes 26 secondes). La taille des grains de sable varie typiquement entre 0.5 mm et 1 mm.

- Avec du gel de silice \square on mesure $Q_2 \square 8.1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ (soit 80 ml en 16 minutes 30 secondes). La taille des grains de silice varie entre 70 et 230 microns.

Le nombre de Reynolds est de l'ordre de 0.6 pour le sable, 0.02 pour le gel de silice.

On trouve que Q_1/Q_2 vaut environ 6, ce qui est raisonnable vus les ordres de grandeur donnés pour la taille des grains de sable et de silice. Mais on ne peut pas aller beaucoup plus loin dans le quantitatif.